28. 03 . 2022

Ad-Soyad:

Numara :

İmza:

SOYUT MATEMATİK II I. Quiz

SORULARI

1) Kafes ve Boole cebri tanımlarını yapınız ve birer örnek veriniz.

2) Doğal sayılarda çarpma işleminin kısaltma özelliği var mıdır? Gösteriniz.

BAŞARILAR

CEVAPLAR

1) • $(A, \leq)$ bir kısmi sıralı küme olsun. $\forall x, y \in A$ için $\sup\{x,y\}$, $\inf\{x,y\}$ mevcutsa A ya bir kafes denir.

$A = \mathbb{Z}$ olsun.

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ için $a \leq b$ verildiğinde $a \vee b = b$, $a \wedge b = a$ olup $\mathbb{Z}$ bir kafestir.

• $(A, \leq)$ bir kafes olsun.

i) $\exists\, 0 \in A$, $\exists\, 1 \in A \ni \forall x \in A$ için

$$x \vee 0 = x, \quad x \wedge 1 = x$$

ii) $\forall x \in A$ için $\exists\, x' \in A \ni x \vee x' = 1$, $x \wedge x' = 0$

iii) $\forall x, y, z \in A$ için

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

özelliklerini sağlayan $(A, \leq)$ ikilisine Boole cebri denir.

$A \neq \emptyset$ olmak üzere $(P(A), \cup, \cap)$ bir Boole cebiridir.

$\forall A_1, A_2 \in P(A)$ için $A_1 \vee A_2 = A_1 \cup A_2$, $A_1 \wedge A_2 = A_1 \cap A_2$ alınırsa $P(A)$ kümesinin bir kafes olduğu gösterilir.

$0 := \emptyset$ $\quad 1 := A$ $\quad A' : A^t$ alınsın.

- $B \in P(A) \Rightarrow B \cup \emptyset = B$ $\quad$ (i)
  $B \cap A = B$

$B \cup B^t = A$ $\quad B \cap B^t = \emptyset$ $\quad$ (ii)

$\cup$ nin $\cap$ üzerine, $\cap$ nin $\cup$ üzerine dağılma özelliği vardır (iii)

2) $A = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^* \text{ için } mp = np \Rightarrow m = n\} \subseteq \mathbb{N}$

- $0 \in A$?

$mp = 0p \Rightarrow mp = 0$
$\Rightarrow m = 0, \quad p \in \mathbb{N}^*$
$\Rightarrow m = n$

- $\forall n \in A$ için $n^+ \in A$?

$n \in A \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*$ için $mp = np \Rightarrow m = n \ldots$ ①

$n^+ \in A \overset{?}{\Longleftrightarrow} \forall m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*$ için $mp = n^+ p \Rightarrow m = n^+$

$mp = n^+ p \Rightarrow mp = np + p$, Çarpma tanımı

$$\left.\begin{array}{l} n^+ \neq 0 \\ p \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow mp \neq 0$$
$\Rightarrow m \neq 0$
$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \ni m = k^+$

$mp = np + p \Rightarrow k^+ p = np + p$ $\quad$ Çarpma tanımı, değişme öz.
$\Rightarrow pk + p = np + p$
$\Rightarrow pk = np$ $\quad$ Toplamada kısaltma özelliği
$\underset{①}{\Rightarrow} k = n \Rightarrow m = n^+$

(Diğer değişkenler üzerinden de çözüm yapılabilir.)